1002. Tietze－松村ノ定理ノ一証明

中村　正弘（東北大）

カナリ前ノ話デスガ Tietze[1] ト松村氏[2] ガ次ノ定理ヲ証明シテ居ラレマス。

定理．　R^n ノ閉，連結ナ集合ガ局所凸集合ナラバ凸集合デアル。

但シ局所凸集合トハソノ集合 H ノ各点 p ノアル近傍 U ヲ撰ブト U ハ H ガ凸集合ニナルヤウナ集合ヲ呼ビマス。

（Tietze）

所デ最近ニイタヅラヲシテ，コノ定理ヲ Banach 空間ニ拡張シテ直接証明ヲヤッテ見ツストー寸纏ニ出来過ギテシマヒマシタ。ドコガ間違ッテオルノカ判リマセンノデ，《紙数談》ノ紙上ヲ拝借シテ御権威ノ御叱正ヲ受ケタイト思ヒ

---

1) Tietze, Math. Zeits., 28 (1928)

2) 中島，東北数学雑誌，29 (1928)

マスノデ，投稿スルコトニシマシタ。

定理ヲハッキリ書キマスト次ノ通リデス。

<u>定理.　Eヲ *strictly convex* ナB-空間トシ，HヲEノ集合デコンパクト，連結，局所凸トシマス。スルトHハ必然的ニ凸集合ニナリマス。</u>

証明ハコンパクトト云フ点ヲ除クト全ク初等的デス。面倒デスが，成ルベク正確ニ書クタメニツマラナイ定義ヲシバラク並べサセテ頂キマス。

1

Hがコンパクトト云フコトヲ使ッテ例ニヨッテ例ノ如ク有限個ノ開球 U_i デHヲ覆ヒ，$U_i \cap H$ ヲ凸ニスル様ニ取リマス。コノ被覆ハ証明ヲ通ジテ取リ換ヘマセン。

ソコデ上ノ被覆ヲヌッタラ，次ニ $(H \cap U_i \cap U_j)^a$ —— $H \cap U_i \cap U_j$ ノ閉被デス —— が空集合ニナラナイモノヲ集メテ Γ トシ $S_{ij} = (H \cap U_i \cap U_j)^a$ デ示シマス。

次ニHノ中カラ勝手ニ二点 a, b ヲ撰ビ出シテコレヲモトニシテ<u>橋</u>ヲ作リマス。橋ト云フノハ $I = [a, p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n, b]$ トイフHノ元ノ順序ヲ持ツ組デ，p_i ノ取リ方ヲ次ノヤウニ定メマス。便宜上 $a \in U_1$ トシ $b \in U_r$ トシマス。

1°. p_1 ヲ S_i ノ中カラ取ル。

2°. p_i が S_{jk} ノ中ニアレバ，p_{i+1} ハ S_{kl} ノ中ヨリ撰ブ。

3°. 一ツノ S_{ij} ノ中カラハ唯一ツノ元 p_K ヲ撰ビ，二度トハ取リ出サナイ。

4°. 最後ニ p_n ハ S_{tr} ノ中ヨリ撰ブ。

コノ定義カラ見テ (a, p),[3] (p_i, p_{i+1}), (p_n, b) ガ H ニ属シテオルコトハ明デス。コノ p_i ヲ脚ト呼ブコトニシマス。

$I=[a, p, \cdots\cdots, b]$ トイフ a, b ヲ端点ニ持ツスベテノ橋ヲ集メテ Π デ表シ，Π ヲ次ノ同値関係デ重リ合ハナイ部分集合 Π_i ニ分ケマス。

〔同値関係ノ定義〕 $I=[a, p_1, \cdots\cdots, p_n, b]$ ト $I'=[a, q_1, \cdots\cdots, q_n, b]$ ガ同値デアルトハ $q_i \in S_{jk}$ カラ $p_i \in S_{jk}$ ガ出ルコトダトシマス。

コノ関係ガ例ノ三公理ヲ満スノデ上ノヤウニ分ケルコトガ出来ルワケデス。

2.

次ニ橋ノ長サ: 即チ $I=[a, p_1, \cdots\cdots, p_n, b]$ ナラバ

$$p(I)=\sum_{i=1}^{n+1}\|p_i-p_{i-1}\| \qquad p_0=a,\ p_{n+1}=b.$$

ヲコレデ定義スルト，$p(I)$ ハ實ハ p_i ノ n- 変数ノ実函数ニ成ルワケデス。所デソノ定義サレテオル領域 $S_{jk}\times\cdots\times S_{tr}$ ハコンパクトデスカラ各 ノ Π_i ノ中ニハ少クトモ一ツノ I ニ対シテ $p(I)$ ガ最小トナルモノガ存在シマス。総テノ i ヲ

3) (a, p) トハ a ト p ヲ結ブ線分ノ意味デス。以下同様

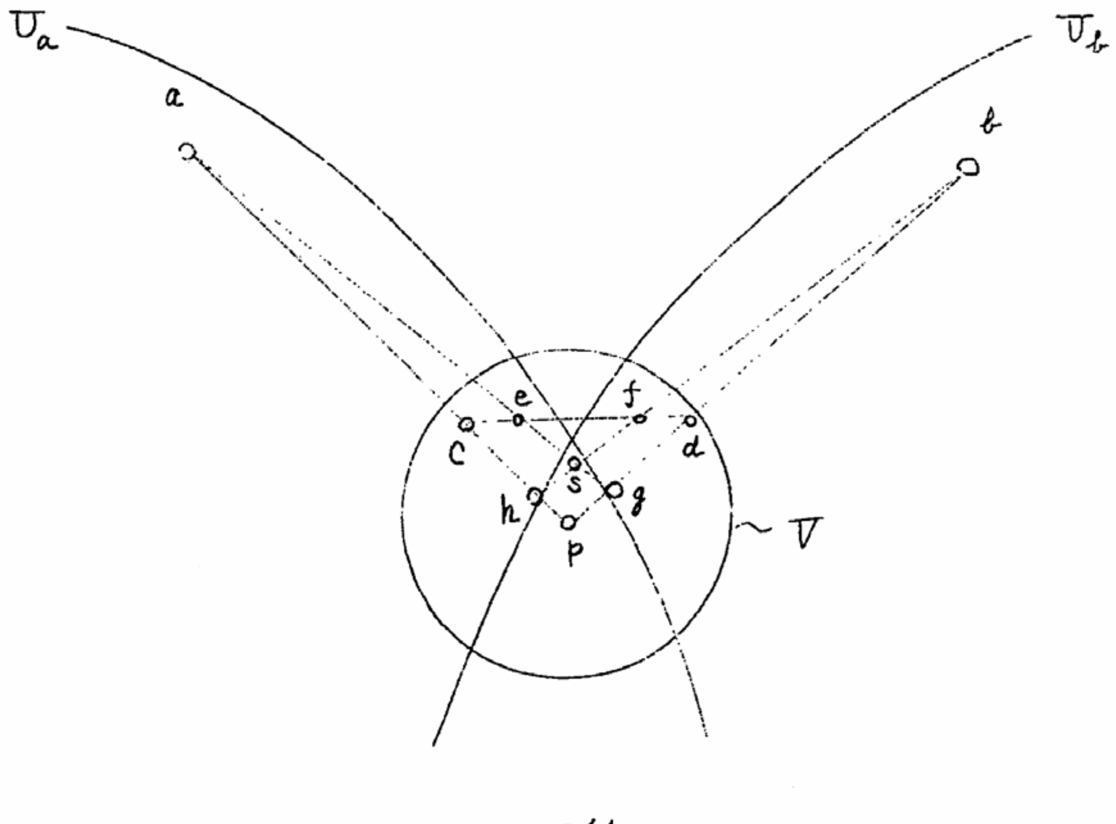
通ジテ一番 $p(\mathrm{I})$ ノ小サイ橋ヲ a, b ヲ結ブ<u>径橋</u>ト呼ビマス。

任意ノ二点 a, b ヲ結ブ線分ガ H ニ入ルトイフ代リニ、径橋ガ H ニ入ッテヰルコトハ明ナノデ、次ノ補助定理ヲ証明シマス。

<u>補助定理</u>　<u>総テノ径橋ハ線分デアル</u>。

3

コレヲ脚ノ数ニヨル帰納法デ証明シマス。脚ノ数ガ 0 デハ無意味ナノデ、径橋 I ガ $[a, p, b]$ トイフ型ノモノダッタトシマス。$p \in H$ デスカラ p ニ於ケル<u>アル</u>開球 $\triangledown$ ヲ取ルト $\triangledown \cap H$ ガ凸ニナルモノガアル筈デス。ソコデ線分 (a, p) ト (p, b) ノ上ニ c ト d トヲ撰ンデ $c \in \triangledown \cap U_a$[4], $d \in \triangledown \cap U_b$ トスル事ハ勿論出来マス。（ソノ辺ハ圖ヲ見テ下サイ）



局所凸トイフノヲ使ヘバ(c, d)ハVノ中ニ入ル以上又Hノ中ニ入ッテ来マス．ソコデ次ニ(c, d)ノ上ニ$U_a \cap V$, $U_b \cap V$ニ属スルe, fヲ取リ，aトe，bトfヲ結ンデ延シ，交点ヲsトシ，(t, b)，(a, t)トノ各々ノ交点ヲg, hトシマス。eトgトハVノ中ニアル以上局所凸ノ假定デ$(e, g) \leqq H$，同様ニ$(f, h) \leqq H$ヲ得マス．

ソコデλヲ細ミナセレバ(a, s)ト(s, b)ハHニ属スルコトニ成リマス。所デ$[a, s, b]$トイフ線分ノ和ヲ長サヲ延サナイ様ニシテ橋ニ変ヘ，（出来ル事ハ明デス）。ソノ橋ヲJトシマス。

今初メノ橋Iガ直線デナイトスレバ少クトモsハpトハ変ッテ来マスノデ，*strictly convexity* ヨリ

$$p(J) < p(I)$$

ヲ得マス。コレハ假定ニ反シマス．

4

コレカラハ幾デ$m-1$迄定理ガ成立ッタトシテ，$I = [a, p_1, \cdots\cdots, p_{m-1}, b]$ガ$m$個ノ脚ヲ持ツ径橋ダトスルト，$[a, p_1, \cdots\cdots, p_m]$ト$[p_1, p_2, \cdots\cdots, b]$トハヤハリ径橋ニ成リマスカラ，帰納法ノ假定デ線分ニナルノデ，Iモ亦線分ニ成ッテシマヒマス。

---

4) 前頁脚註

U_aトハaノ入ッテヰルアル開球トイフ意味デス。U_aハ初メノ被覆ノ中カラ取リマス。

コレデ証明ハ終ツタノデスが，誤りがオ判リニナッタ方ハ真ニ恐レ入リマスが僕迄御一報下サイマセンデセウカ？

新年早々世迷事ラオ聞キニナッテサゾ御迷惑デセウが。